0.1 Pre-Triangulated category

Triangulated category を定義したいのだが、その前に pre-triangulated category と呼ばれるものを定義したい。これらは Homological Algebra などで定義される Triangulated category やそこから octahedral axiom と呼ばれるものを除いた pre-triangulated category の一般化のようなもので、区別するために Classic Triangulated category などと呼ばれる。簡単に述べるなら、Classic の方の Transformation fanctor が category equivalence として定義されるのに対し、この条件をはずしてみたらどうなるだろうかという試みである。Shift が戻せないということはもう一つ Transformation fanctor とは別に Shift を戻す fanctor を別に考える必要があり、それに対しても Classic triangulated category における公理の双対的な公理を満たすことが求められる。

この典型的な例としてすぐに思いつくのは、基点付き位相空間の圏（そのホモトピー圏）である。Shift させるのが、suspension の Σ、Shift を戻すのがその adjoint の loop である Ω として具合がよさそうである。

より一般的に、どこの圏で Triangulated category の議論をすべきか悩むのだが、Classic のように Additive であるという必要はなさそうである。先にも行ったように $\mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_*)$ が重要な基盤となる。Hovey らは $\mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_*)$ と category equivalence である $\mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ に注目して、この圏のうまい action がある圏で pre-triangulated category の公理を定めている。そのためにはまず、$\mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ あるいは $\mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_*)$ の (co)fiber sequence を定義する必要がある。これは classic で言うところの distinglish triangle である。

Definition 0.1.1

$\mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_*)$ の cofiber sequence とは、$i : A \longrightarrow X$ を cofibration としたときの cofiber sequence と同型な diagram。つまりは、i の homotopy cofiber sequence と同型な diagram である。双対的に fiber sequence は $p : E \longrightarrow B$ を fibration としたときの fiber sequence と同型な diagram とする。つまり、p の homotopy fiber sequence と同型な diagram である。

ただし、ここで言う cofibration、fibration とは Quillen による model 構造で考えている。つまり cofibration=rerative cell complex の inclusion の retract であり、fibration=Serre fibration である。

Definition 0.1.2

Ho($\mathbf{SSet}_*$) の (co)fiber sequence とは、Ho($\mathbf{SSet}_*$) の diagram である $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ で geometric realization をとった $|A| \longrightarrow |B| \longrightarrow |C|$ が Ho($\mathbf{TOP}_*$) における (co)fiber sequence となることである。

Simplicial set だけで (co)fiber sequence を定義することもできるが、**TOP** と関連づけたほうが何かと都合がいい。

Definition 0.1.3

C を closed Ho($\mathbf{SSet}_*$)-module とし、その structure を

$$\wedge : C \times \mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*) \longrightarrow C$$

$$\mathrm{Hom} : \mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)^{op} \times C \longrightarrow C$$

$$\mathrm{Map} : C^{op} \times C \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$$

としておく。このとき suspension、そして loop fanctor を以下のように定義する。

$$\Sigma : C \longrightarrow C \quad , \quad \Omega : C \longrightarrow C$$

を $\Sigma X = X \wedge S^1$, $\Omega X = \mathrm{Hom}(S^1, X)$ とする。定義より、$\Sigma : C \Longleftrightarrow C : \Omega$ である。ただし、$S^1 = \partial\Delta[2]$

Definition 0.1.4

C を finite productc と coproduct で閉じた closed Ho($\mathbf{SSet}_*$)-module とする。C の pre-triangulatation とは、C の diagram である $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ の collection の cofiber sequences と fiber sequences と呼ばれるものが与えられ次を満たす。

1. $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ を cofiber sequence とすると、これには ΣX の Z への right coaction、$Z \longrightarrow Z \vee \Sigma X$ が与えられている。双対的に $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ を fiber sequence とすると、これには ΩZ の X への right action、$X \times \Omega Z \longrightarrow X$ が与えられている。このとき、$\partial : Z \longrightarrow \Sigma X$ を $Z \xrightarrow{\text{coact}} Z \vee \Sigma X \xrightarrow{0 \vee 1} \Sigma X$ により定義し、$\delta : \Omega Z \longrightarrow X$ を $\Omega Z \xrightarrow{(0,1)} X \times \Omega Z \xrightarrow{\text{act}} X$ で定義する。

2. cofiber sequence と isomorphic な diagram は cofiber sequence である。ただし、ここで言う isomorphic とは、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を cofiber sequence、$X' \xrightarrow{f'}$

$Y' \xrightarrow{g'} Z'$ を diagram としたとき、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[d, "c"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \end{tikzcd}$$

の可換図で、a, b, c は isomorphism、かつ c について、

$$Z' \xrightarrow{c^{-1}} Z \xrightarrow{\text{coact}} Z \vee \Sigma X \xrightarrow{c \vee \Sigma a} Z' \vee \Sigma X'$$

が coaction となる。

双対的に fiber sequence と isomorphic な diagram は fiber sequence である。

3. 任意の $X \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、$* \longrightarrow X \xrightarrow{=} X$ は cofiber sequence であり、双対的に $X \xrightarrow{=} X \longrightarrow *$ は fiber sequence である。

4. 任意の $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ に対し、$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$ という cofiber sequence が存在し、$W \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ という fiber sequence が存在する。

5. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を cofiber sequence としたとき、$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$ も cofiber sequence である。さらに、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が fiber sequence ならば、$\Omega Z \xrightarrow{\delta} X \xrightarrow{f} Y$ も fiber sequence である。

6. 2つの cofiber sequence である $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ と $X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z'$ に対し、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \end{tikzcd}$$

が可換とする。このとき、Σa-equivalence である $c : Z \longrightarrow Z'$ が存在し、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[d, "c"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \end{tikzcd}$$

が可換となる。つまり、

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{coact}} & Z \vee \Sigma X \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c\vee\Sigma a} \\ Z' & \xrightarrow{\text{coact}} & Z' \vee \Sigma X' \end{array}$$

が可換である。

7. octahedral axiom とその dual を満たす。つまり、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、3 つの cofiber sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} U$$
$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \xrightarrow{v} V$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{w} W$$

が存在し、さらに cofiber sequence

$$U \xrightarrow{r} V \xrightarrow{s} W$$

が存在し、$v \circ g = r \circ u$, $s \circ v = w$ を満たし、r は $\Sigma 1_X$-equivalence であり、s は Σv-equivalence である。また、ΣU の W への coaction が、

$$W \xrightarrow{\text{coact}} W \vee \Sigma Y \xrightarrow{1\vee\Sigma u} W \vee \Sigma U$$

によって与えられる。

8. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を cofiber sequence、$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Z'$ を fiber sequence とし、

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\partial} & \Sigma X \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & & & \downarrow{\scriptstyle ad(a)} \\ \Omega Z' & \xrightarrow{\delta} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

を可換とする。ただし、$ad(a)$ は a の随伴。このとき、$c : Z \longrightarrow Y'$ が存在し、図式を可換にする。双対的に、

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\partial} & \Sigma X \\ \downarrow{\scriptstyle ad(a)} & & & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ \Omega Z' & \xrightarrow{\delta} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

の可換図で、図式を可換にする $c : Y \longrightarrow X'$ が存在する。

9. $- \wedge -$ は両成分に対し cofiber sequence を保つ。つまり任意の C の cofiber sequence $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ と $K \in \mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ に対し、$X \wedge W \longrightarrow Y \wedge K \longrightarrow Z \wedge K$ は cofiber sequence であり、また任意の $\mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ の cofiber sequence である $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ と $W \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、$W \wedge A \longrightarrow W \wedge B \longrightarrow W \wedge C$ も cofiber sequence である。

   また、$\mathrm{Hom}(-,-)$ は第 2 成分に対し fiber sequence を保ち、第 1 成分に対し cofiber sequence を fiber sequence へ移す。つまり任意の C の fiber sequence $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ と $K \in \mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ に対し、$\mathrm{Hom}(K,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,Z)$ は fiber sequence である。また任意の $\mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$ の cofiber sequence である $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ と $W \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、$\mathrm{Hom}(C,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,W)$ は fiber sequence である。

   また、$\mathrm{Map}(-,-)$ も同様に第 2 成分に対し fiber sequence を保ち、第 1 成分に対し cofiber sequence を fiber sequence へ移す。

Definition 0.1.5

Pre-triangulated category である C とは nontrivial な closed $\mathrm{Ho}(\mathbf{SSet}_*)$-module で、任意の small product と coproduct で閉じ、C の pre-trianguration が与えられたものである。

Definition 0.1.6

C を pre-triangulated category で Σ が category equivalence ならば、C を triangulated category と呼ぶ。

Theorem 0.1.7

Triangulated category は Classic triangulated category である。

proof)　C を Triangulated category とし、任意の object である X を考えると、$X \cong \Sigma^2\Omega^2 X$ であるため、

$$\mathrm{Hom}_C(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_C(\Sigma^2\Omega^2 X, Y)$$

であるが、$\Sigma^2(\Omega^2 X)$ は co abelian group object なので、$\mathrm{Hom}_C(\Sigma^2\Omega^2 X, Y)$ は abelian group となる。これより C は Additive category となり、C の cofiber sequence を distingulish triangle とすれば classic の条件を満たすことは容易にわかる。